

PROJEKTIVNA GEOMETRIJA: UPORABA V RAČUNALNIŠTVU

seminarska naloga pri predmetu
DIFERENCIALNA IN RAČUNSKA GEOMETRIJA

Avtor: Peter Peer
Miha Peternel

Mentor: doc. dr. Neža Mramor Kosta

V Ljubljani, 14.6.2000

Kazalo

1	Povezava med sencami in projektivno geometrijo	4
1.1	Povezava s projektivno geometrijo	4
2	Matematični model projekcije senc	4
2.1	Prostor, luč, objekt, površina	5
2.2	Razmerje med trikotnikom v \mathbb{R}^3 in P^2	5
2.3	Projekcija trikotnika na ravnino	7
2.4	Projekcija sence trikotnika	7
3	Model za računalniško uporabo	8
3.1	Luči, objekti, projekcijske površine	8
3.2	Omejitve okolja	9
3.3	Primer za grafiko - <i>shadow mapping</i>	9
3.4	Primer za računalniški vid	12
4	Zaključek	13
	Literatura	13

Slike

1	Projekcija dveh osvetljenih trikotnikov v prostoru na ravnino	5
2	Idealna postavitev trikotnika glede na opazovalca	6
3	Trikotnik, ki je v projektivnem prostoru daljica - prvi primer	6
4	Trikotnik, ki je v projektivnem prostoru daljica - drugi primer	7
5	Trikotnik, ki je v projektivnem prostoru daljica - tretji primer	7
6	Trikotnik, ki je v projektivnem prostoru daljica - četrti primer	8
7	Trikotnik, ki je v projektivnem prostoru ekvivalent dvema kolineranima daljicama	8
8	Trikotnik, ki je v projektivnem prostoru ekvivalent trem kolinearnim daljicam	9
9	Projekcija trikotnika v S^1 obsega manj kot polovico krožnice okoli opazovalca	9
10	Projekcija trikotnika v S^1 obsega natanko polovico krožnice okoli opazovalca	10
11	Projekcija trikotnika v S^1 obsega celotno krožnico okoli opazovalca	10
12	Primer projekcije trikotnika na ravnino	11
13	Območje sence trikotnika na drugem trikotniku	11
14	Kompleksnost sence ob netočkatem svetlobnem viru	12
15	Senčenje dveh prekrivajočih se trikotnikov	12
16	Uporaba kocke za predstavitev celotnega projekcijskega prostora	13
17	Primer upodobljene (<i>rendering</i>) slike	14
18	Določitev konveksne lupine krogle	15
19	Zaporedje fotografij piramide, ko se vir svetlobe premika od leve proti desni	15
20	Postopek izločanja sence	16
21	Rekonstrukcija piramide	16

1 Povezava med sencami in projektivno geometrijo

Svetila v prostor projecirajo žarke. Prostor napolnijo z žarki, ki segajo od svetila do objekta. Objekti navidezno mečejo sence na druge, ki so bolj oddaljeni od vira svetlobe. Gre za t.i. koncept *shadow-castinga*, čeprav se dejansko dogaja *light-absorbition*. Gledano iz ene strani se svetloba projecira po prostoru in jo objekti absorbirajo, iz drugega vidika pa pričakujemo, da bi svetloba morala osvetljevati vse objekte, pa nekateri objekti mečejo sence na druge objekte.

1.1 Povezava s projektivno geometrijo

Prostor \mathbb{R}^3 gledamo iz neke točke O . Opazujemo objekte v projektivnem prostoru okoli točke O .

Pomemben izrek:

P^2 je topološko ekvivalenten enotski sferi S^2 ali \mathbb{R}^3 , kjer smo določili antipodne točke. Uporabimo torej projektivni prostor P^2 . Točko x iz \mathbb{R}^3 preslikamo v $(x - O)$ v projektivnem prostoru.

Preslikave:

- Točka x iz \mathbb{R}^3 se preslika v $x' = (x - O)$. $x' = (x - O)$ opazujemo v projektivnem prostoru P^2 .
- Črta AB iz \mathbb{R}^3 se preslika v $\lambda_a \cdot A' + \lambda_b \cdot B'$, kjer sta $\lambda_a, \lambda_b \geq 0$ in $\lambda_a + \lambda_b > 0$.
- Konveksni poligon X_i se preslika v $\sum(\lambda_i \cdot X'_i)$, kjer je $\lambda_i \geq 0$ in $\sum(\lambda_i) > 0$.
- Trikotnik $X_1X_2X_3$ se preslika v $k_1 \cdot X'_1 + k_2 \cdot X'_2 + k_3 \cdot X'_3$, $k_1, k_2, k_3 \geq 0$, $k_1 + k_2 + k_3 > 0$.

Enakovrednost točk in daljic:

- 2 točki, ki ležita v \mathbb{R}^3 na istem poltraku, ki se začne v O , sta v projektivnem prostoru ekvivalentni.
- Točka in daljica, ki ležita v \mathbb{R}^3 na istem poltraku, ki se začne v O , sta v projektivnem prostoru ekvivalentni.

2 Matematični model projekcije senc

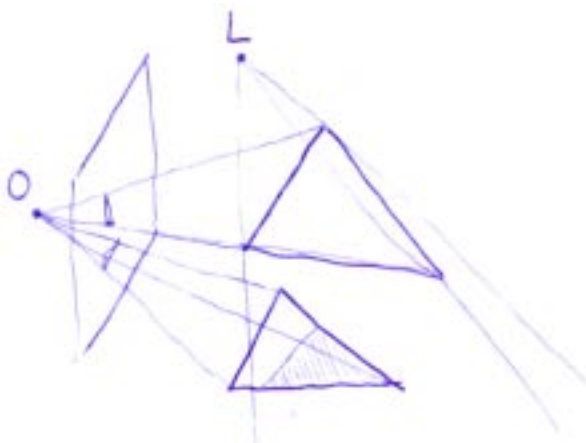
Sprašujemo se, kako lahko projektivno geometrijo uporabljamo za metanje senc v računalniški grafiki in kako za rekonstrukcijo objektov v računalniškem vidu.

2.1 Prostor, luč, objekt, površina

Matematično lahko modeliramo projekcije senc iz naslednjih komponent:

- prostor, ki je običajno \mathbb{R}^3 , v nekaterih redkih primerih nas zanima \mathbb{R}^2
- luč, ki je izvor svetlobe, običajno poenostavljeno točkast, ali pa geometrijsko tak, da ga lahko v razumnem času računalniško simuliramo
- objekt, ki je sestavljen iz površin, ki absorbirajo ali lomijo ali odbijajo svetlobo
- površina v danem prostoru, na kateri opazujemo senco

Na sliki 1 lahko vidimo projekcijo dveh osvetljenih trikotnikov v prostoru na ravnino. Trikotnika sta osvetljena iz točke L , opazovalec je v točki O , slika pa nastaja na projekcijski ravnini pred opazovalcem.



Slika 1: Projekcija dveh osvetljenih trikotnikov v prostoru na ravnino

Za občutek si najprej oglejmo projekcijo primitivov. Osnovni primitiv je trikotnik, saj lahko iz trikotnikov sestavimo površino poljubnega objekta s poljubno natančnostjo.

2.2 Razmerje med trikotnikom v \mathbb{R}^3 in P^2

Slika na projekcijski ravnini je vedno odvisna od postavitve opazovalca in/ali svetlobnega vira. Na naslednjih sedmih slikah bomo podali vse možnosti projekcije trikotnika glede na postavitev v razmerju do opazovalca ali svetlobnega vira.

Na sliki 2 vidimo idealen primer, ko v projekcijskem prostoru vidimo trikotnik, v \mathbb{R}^3 pa dobimo nekakšno neskončno piramido z vrhom v opazovalcu.

Na slikah 3, 4, 5 in 6 vidimo projekcijo trikotnika, ki v projektivnem prostoru predstavljajo daljico, v \mathbb{R}^3 pa ravninski izsek, omejen z dvema poltrakoma, ki se stikata v točki opazovalca. Kot med poltrakoma pa je nujno manjši od 180° .

Na sliki 7 vidimo primer, ko se trikotnik v projektivnem prostoru preslika v dve kolinerani daljici, v \mathbb{R}^3 pa dobimo polravnino, ki se dotika opazovalca.

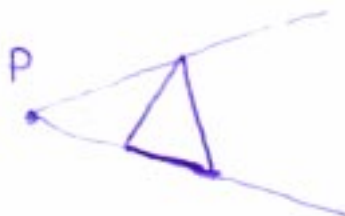
Na zadnji sliki, sliki 8, pa vidimo primer, ko se trikotnik v projektivnem prostoru preslika v tri kolinerane daljice, v \mathbb{R}^3 pa dobimo ravnino, ki vsebuje opazovalca.

Poleg kolineranosti v zadnjih dveh primerih pa velja tudi omejitev, da se daljici v predzadnjem primeru oziroma daljice v zadnjem primeru medseboj stikajo, vendar stikov v projektivnem prostoru ne moremo določiti. V zadnjih treh primerih v projektivnem prostoru vedno vidimo daljico, vendar med posameznimi primeri ločimo na podlagi velikosti daljice v primerjavi s krožnico okoli opazovalca:

- če je to razmerje manjše od $1/2$, potem gre za primere iz slik 3, 4, 5 in 6 (glej sliko 9)
- če je to razmerje $1/2$, potem gre za primer s slike 7 (glej sliko 10) in
- če je to razmerje 1, potem gre za primer s slike 8 (glej sliko 11).

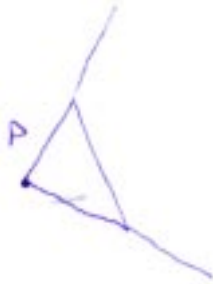


Slika 2: Idealna postavitev trikotnika glede na opazovalca

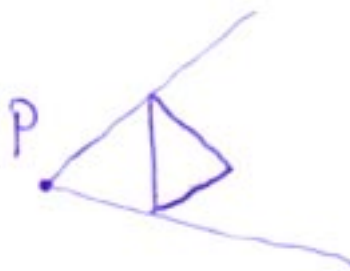


Slika 3: Trikotnik, ki je v projektivnem prostoru daljica - prvi primer

Iz danih razmerij lahko izpeljemo postopke, ki nam omogočajo obravnavo projekcij v \mathbb{R}^3 .



Slika 4: Trikotnik, ki je v projektivnem prostoru daljica - drugi primer



Slika 5: Trikotnik, ki je v projektivnem prostoru daljica - tretji primer

2.3 Projekcija trikotnika na ravnino

Na sliki 12 je podan primer projekcije trikotnika na ravnino, sedaj pa si oglejmo še matematično izpeljavo te projekcije:

$$\lambda_u \cdot \vec{u} + \lambda_v \cdot \vec{v} + (M - P) = \lambda_d \cdot (T - P) \quad (1)$$

Pri tem predpostavljamo, da prostor opazujemo iz točke P , ravnina gre skozi točko M in je napeta med vektroja \vec{u} in \vec{v} , opazovana točka na trikotniku (v \mathbb{R}^3) pa je T . λ_u in λ_v predstavljata koordinati točke na ravnini, λ_d pa nam predstavlja razdaljo od točke P do točke T .

2.4 Projekcija sence trikotnika

Ko opazujemo točko, opazujemo žarek (ali več žarkov) svetlobe od luči do neke točke na površini, kjer se svetloba zbira. Žarek je ekvivalenten točki v projektivnem prostoru P^2 .

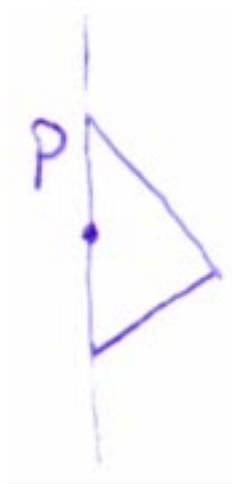
Kako izvemo ali je točka osenčena? Točka je osenčena, če se v projektivnem prostoru ujema s kakšno točko, ki je v \mathbb{R}^3 bližje viru svetlobe.

Območje, kjer lahko pride do sence, je tam, kjer imata trikotnika v projektivnem prostoru presek, kar je razvidno iz slike 13.

V kolikor luč ni točkasta, je projekcija sence bistveno bolj kompleksna in je ne moremo enostavno obravnavati s projektivno geometrijo. Primer je



Slika 6: Trikotnik, ki je v projektivnem prostoru daljica - četrti primer



Slika 7: Trikotnik, ki je v projektivnem prostoru ekvivalent dvema kolinernima daljicama

ilustriran na sliki 14.

3 Model za računalniško uporabo

3.1 Luči, objekti, projekcijske površine

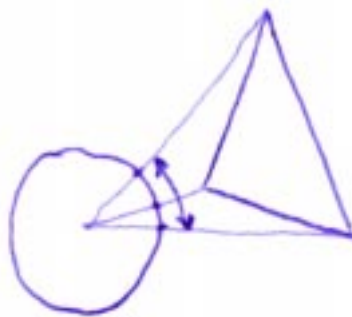
Pri računalniški obdelavi največkrat uporabljamo točkaste luči. V kolikor so luči paralelne, jih obravnavamo z afino geometrijo. Točkaste luči pa enostavno obravnavamo s projektivno geometrijo. Netočkaste luči predstavimo kot približek iz večih točkastih luči, kjer sence ustrezno kombiniramo.

Objekti so iz primitivov, ki so trikotniki ali zlepki. Zlepke pred prikazom običajno pretvorimo v majhne trikotnike.

Projekcijske površine so primitivi ali ravnine, oziroma pogosteje paralelogrami v ravnini.



Slika 8: Trikotnik, ki je v projektivnem prostoru ekvivalent trem kolinearnim daljicam



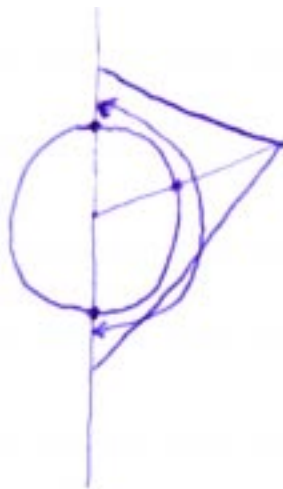
Slika 9: Projekcija trikotnika v S^1 obsega manj kot polovico krožnice okoli opazovalca

3.2 Omejitve okolja

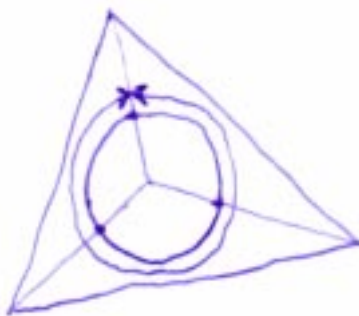
Prostor je \mathbb{R}^3 , zaradi omejene predstavitve realnih števil pa je prostor končen in kvantiziran. Površine so končne, vse so sestavljene iz trikotnikov. Objekti so predstavljeni zgolj s svojo površino, notranjosti sploh ne obravnavamo.

3.3 Primer za grafiko - *shadow mapping*

Strojna oprema zna narediti izredno hitro projekcijo, ne pa sledenje žarku. Zato uporabimo za senčenje postopek dvakratne projekcije. Med izvor svetlobe in objekt postavimo projekcijsko ravnino, imenovano *shadow map*, kjer hranimo podatke o razdalji do najbližjega objekta. *Shadow map* je kvantiziran pravokotnik ali paralelogram v \mathbb{R}^3 . Tvori dvodimenzionalno mrežo točk, kjer vsaka hrani razdaljo do najbližje točke, ki leži na istem mestu v projektivnem prostoru. Algoritmčno se postopek prične s tem, da objekte projeciramo na ravnino in si shranimo minimalno razdaljo v mreži kvantiziranih točk na *shadow map*. Ko smo to ponovili za vse prisotne objekte in vse vire svetlobe, nastopi senčenje objektov. Sedaj *shadow map* projeciramo nazaj na objekte in osenčimo tiste točke na objektih, ki so bolj



Slika 10: Projekcija trikotnika v S^1 obsega natanko polovico krožnice okoli opazovalca



Slika 11: Projekcija trikotnika v S^1 obsega celotno krožnico okoli opazovalca

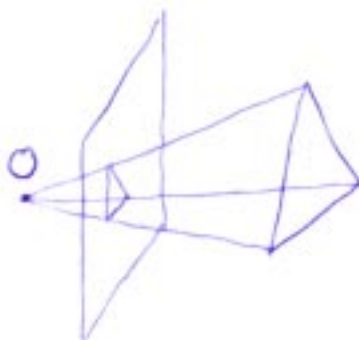
oddaljene od shranjene minimalne razdalje na ustrezni točki *shadow mape*.

Osnovna formula za *shadow mapping* je projekcija točke iz \mathbb{R}^3 v koordinate na *shadow mapi*. Denimo, da je izvor svetlobe v točki L , *shadow mapa* izhaja iz točke M in je napeta med vektroja \vec{u} in \vec{v} , opazovana točka v \mathbb{R}^3 pa je T . Rešiti moramo enačbo ekvivalentno enačbi (1):

$$\lambda_u \cdot \vec{u} + \lambda_v \cdot \vec{v} + (M - L) = \lambda_d \cdot (T - L) \quad (2)$$

Kvantizirane koordinate na *shadow mapi* dobimo s kvantizacijo λ_u in λ_v . λ_d nam predstavlja razdaljo od izvora svetlobe do opazovane točke, ki jo tudi kvantiziramo, zato moramo biti pri primerjavi razdalje pazljivi.

Na sliki 15 vidimo način senčenja dveh prekrivajočih se trikotnikov. V prvem koraku projiciramo trikotnika na projekcijsko ravnino, pri čemer si za vsako kvantizirano točko na ravnini zapomnimo razdaljo do najbližjega



Slika 12: Primer projekcije trikotnika na ravnino



Slika 13: Območje sence trikotnika na drugem trikotniku

objekta. V drugem koraku pa projiciramo ravnino nazaj na trikotnike, pri čemer senčimo le tiste točke, ki so bolj oddaljene kot shranjena minimalna razdalja do objekta.

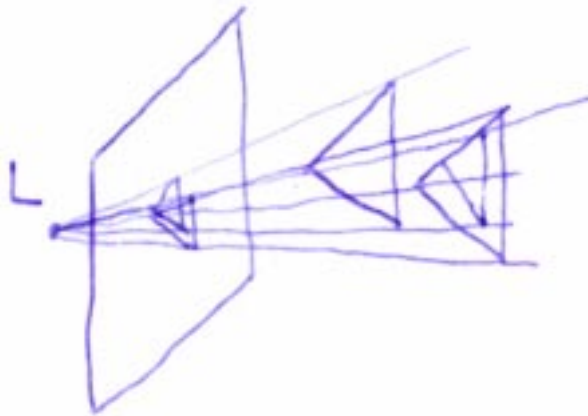
Na sliki 16 pa uporabimo namesto projekcijske ravnine kocko, saj tako lahko zaobjamemo celoten projekcijski prostor okoli točkastega vira svetlobe.

Metoda *shadow mapping* je ekvivalentna dvakratnemu mapiranju tekstur, ki je standardni postopek v računalniški grafiki, z dodatno primerjavo razdalje do izvora svetlobe v drugem koraku.

Direktna uporaba projektivne geometrije v računalniški grafiki je možna le, kadar opazujemo prostor samo iz ene točke. Tak problem je določanje vidljivosti objektov iz neke točke. Iščemo množico potencialno vidnih objektov (*PVS - potential visibility set*). Za ta problem zgolj tvorimo preseke objektov v projektivnem prostoru in zavržemo dele objektov, ki so bolj oddaljeni od točke opazovanja v prostoru \mathbb{R}^3 .



Slika 14: Kompleksnost sence ob netočkatem svetlobnem viru



Slika 15: Senčenje dveh prekrivajočih se trikotnikov

3.4 Primer za računalniški vid

Ilustrativen primer si lahko predstavljamo s sistemom kamere in enega ali več točkastih virov svetlobe. Sistem lahko deluje na dva osnovna načina:

- več statičnih virov svetlobe, ki se izmenično vklapjajo, ob spremembi pa zajamemo sliko
- en vir svetlobe, ki se giblje, ob premiku pa se zajame slika.

Če poznamo neosvetljen prostor in natančen položaj vira svetlobe, lahko določimo položaj senc na zajetih slikah. Na podlagi informacije o mestu vira in položaju sence lahko sklepamo na mesto objekta v projektivnem prostoru. V 3D prostoru se objekt potencialno nahaja med senco in lučjo. Če tvorimo presek potencialnih mest objekta v 3D prostoru, lahko omejimo področje



Slika 16: Uporaba kocke za predstavitev celotnega projekcijskega prostora

objekta. Na ta način dobimo rekonstrukcijo objekta. Problem so konkavna področja.

Na sliki 18 vidimo primer določitve konveksne lupine krogle, kjer dobimo informacijo s pomočjo treh viriv svetlobe, predpostavljamo pa, da poznamo natančen položaj luči in projekcijske ravnine glede na kamero.

Na slikah 19, 20 in 21 vidimo kompleksnejši primer rekonstrukcije piramide.

4 Zaključek

Podala sva kratek pregled uporabnosti projektivne geometrije v računalniški grafiki in računalniškem vidu. Opisala sva le stvari, ki niso posebej izpostavljene v [1], bralec pa ta vir toplo priporoča kot uvod v projektivno geometrijo, uporabno v računalništvu.

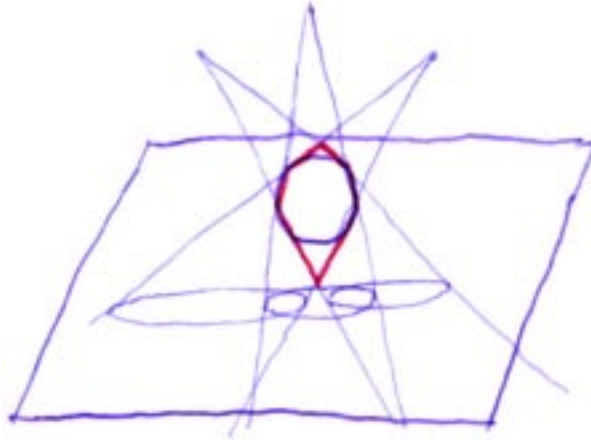
Literatura

- [1] S. Birchfield, *An Introduction to Projective Geometry (for Computer Vision)*, <http://robotics.stanford.edu/~birch/projective/>, 1998.
- [2] M. Daum, G. Dudek, *On 3-D Surface Reconstruction Using Shape from Shadows*, *CVPR*, 1998.
- [3] G. Farin, D. Hansford, *Geometry Toolbox: for Graphics and Modeling*, A K Peters, 1998.

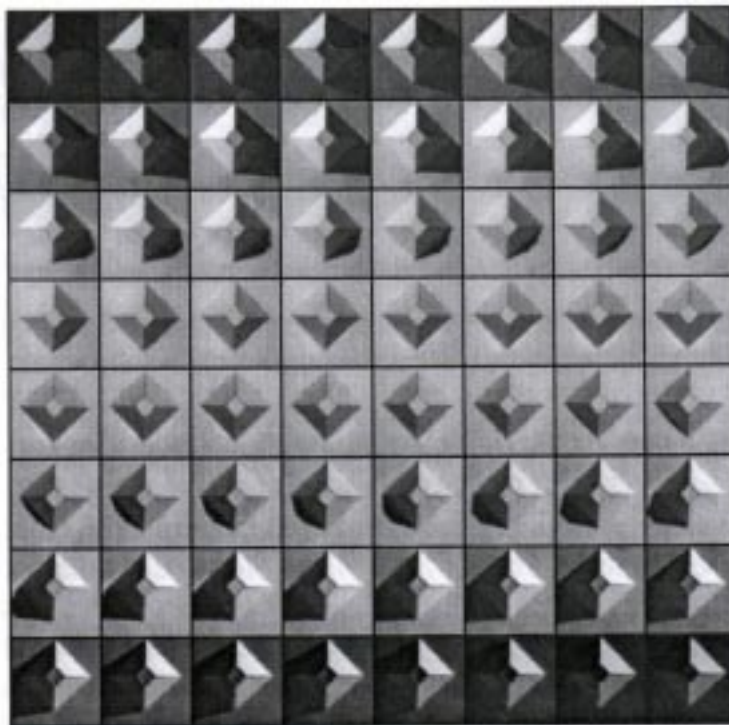


Slika 17: Primer upodobljene (*rendering*) slike

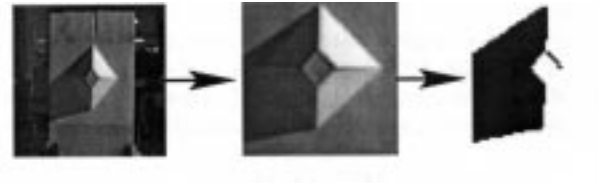
- [4] O. Faugeras, *Three-Dimensional Computer Vision: A Geometric Viewpoint*, MIT Press, 1993.
- [5] M. Herf, Efficient Generation of Soft Shadow Textures, <http://www.cs.cmu.edu/~ph/shadow.html>.
- [6] M. Herf, P. Heckbert, Fast soft Shadows, <http://www.stereopsis.com/shadow/sig/cookbook.html>, 1996.
- [7] T. Košir, B. Magajna, *Transformacije v geometriji*, DMFAS, Ljubljana, 1997.



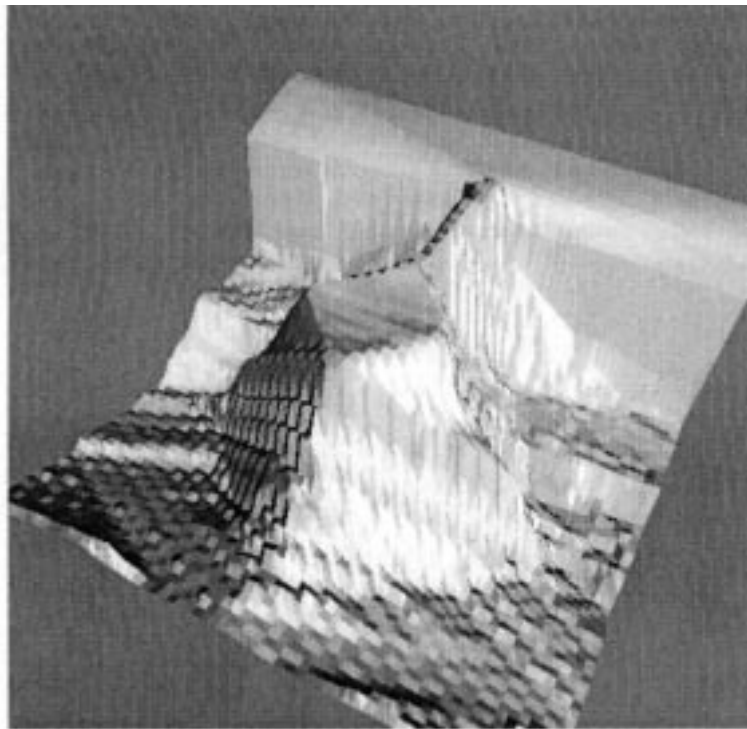
Slika 18: Določitev konveksne lupine krogle



Slika 19: Zaporedje fotografij piramide, ko se vir svetlobe premika od leve proti desni



Slika 20: Postopek izločanja sence



Slika 21: Rekonstrukcija piramide